UMH
UNIVERSITE DE MONS-HAINAUT

Physique Générale et Physique des Particules Elémentaires

A propos de la densité d'énergie "noire" dans l'Univers.

PPEl-UMH 2002 04-357
Fernand GRARD

Avertissement:

Sur base de l'observation de Supernova Ia lointaines (z > 1), l'Univers serait actuellement dans une phase d'expansion accélérée dont l'élément responsable serait due à la présence dans l'Univers d' une densité diffuse d'énergie "noire" ou d'énergie du vide, en relation avec la constante cosmologique.

Pour un physicien des particules élémentaires, l'énergie du vide est un objet physique dont le réalité pourrait résulter de l'omniprésence dans le vide du champ de Higgs, dont la valeur moyenne, en l'absence de toute matière, est différente de zéro.

L'évaluation de la densité d'énergie du vide avec ce que nous connaissons actuellement des propriétés du champ de Higgs est à l'origine de ce rapport interne que j'ai composé de manière à ce qu'il me serve, et pourrait servir à d'autres, d'aide mémoire pour situer ce problème d'expansion accélérée dans le contexte du formalisme de base de la cosmologie et de ce que nous connaissons actuellement de ses principaux paramètres. Je me suis référé pour ceci au livre: "The early Universe" de Kolb et Turner et à quelques références typiques qui seront citées en temps utiles.

Quant aux considérations relatives à cette énergie du vide ou énergie noire, elles ne sont qu'introductives au problème soulevé, avec quelques remarques suscitées par le résultat de l'évaluation. Ce rapport interne pourrait avoir ainsi une suite …

Rappels :

Les équations d'Einstein s'écrivent:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathbf{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \qquad (1)$$

avec:

- $g_{\mu\nu}$ définissant la métrique de Robertson-Walker pour un espace homogène et isotrope dans sa partie spatiale:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right] \qquad (2)$$

  - $R(t)$ est le facteur d'expansion ;
  - (r, θ, φ) sont des coordonnées co-mouvantes (constantes pour un observateur participant à l'expansion de l'Univers);
  - k est égal à +1, 0, -1 suivant que l'espace est de courbure spatiale constante positive (espace elliptique), nulle (euclidien), négative (hyperbolique) ;
- $R_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci, explicitement compte tenu de la métrique adoptée:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right] g_{ij} \end{aligned} \qquad (3)$$

- $\mathbf{R}$ étant le scalaire de Ricci:

$$\mathbf{R} = -6\left[\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}\right] \qquad (4)$$

- $T_{\mu\nu}$ étant le tenseur de tension-énergie: diagonal conformément aux symétries de la métrique; de composantes d'espace égales conformément à la propriété d'isotropie; pouvant être défini comme applicable à un fluide parfait dont la densité d'énergie et la pression sont fonctions du temps: $\rho(t), p(t)$:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = diag(\rho,-p,-p,-p) \qquad (5)$$

- Λ étant la constante cosmologique, laquelle peut s'exprimer en termes d'une densité d'énergie du vide, ρ_{VAC} , selon:

$$\Lambda = 8\pi G\rho_{VAC} \qquad (6)$$

  ρ_{VAC} est ainsi constante.
- G étant la constante de gravitation (6.67x10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2})

- La composante μ = 0 de l'équation de conservation de l'énergie:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \qquad \text{(quadridivergence covariante !)}$$

donne la 1ère loi de la thermodynamique sous la forme:

$$\boxed{d\left(\rho R^3\right) = -pd\left(R^3\right) \qquad (7)}$$

ou, de façon équivalente:

$$d\left[R^3(\rho+p)\right] = R^3 dp \qquad (8)$$

: la variation de l'énergie dans un élément de volume comouvant est égal à - la pression fois la variation de volume:

$$d\left(\frac{4}{3}\pi R^3 r^3 \times \rho\right) = -pd\left(\frac{4}{3}\pi R^3 r^3\right) \qquad \rightarrow \qquad (7)$$

- En adoptant l'équation d'état la plus simple:

$$\boxed{p = \omega\rho \qquad (9)}$$

avec ω indépendant du temps, la densité d'énergie se comporte comme:

$$\boxed{\rho \propto R^{-3(1+\omega)} \qquad (10)}$$

En effet, à partir de l'équation (7) :

$$d\left(\rho R^3\right) = -pd\left(R^3\right)$$

$$R^3 d\rho + 3R^2\rho dR = -3pR^2 dR$$

$$Rd\rho = -3(p+\rho)dR$$

$$p = \omega\rho \rightarrow Rd\rho = -3\rho(1+\omega)dR$$

$$\rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+\omega)\frac{dR}{R}$$

$$\rightarrow \ln\rho = \ln R^{-3(1+\omega)}$$

Les cas d'intérêt courant sont les suivants:

$$\underline{\text{Rayonnement:}} \quad p = \frac{1}{3}\rho \Leftrightarrow \rho \propto R^{-4} \qquad (11)$$

$$\underline{\text{Matière:}} \quad p = 0 \Leftrightarrow \rho \propto R^{-3} \qquad (12)$$

$$\underline{\text{Vide:}} \quad p = -\rho \Leftrightarrow \rho \propto (\Lambda = Cte) \qquad (13)$$

- La composante 0 - 0 de l'équation d' Einstein donne <u>l'équation de Freedmann</u>:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \qquad (14)$$

ou avec <u>ρ incluant la contribution du vide</u>, compte tenu de (6):

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad (14')}$$

- La composante i - i donne:

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p + \Lambda \qquad (15)$$

ou avec <u>p incluant la contribution du vide</u>, compte tenu de (6) et (13):

$$\boxed{2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \qquad (15')}$$

Deux des trois équations (7), (14), (15) ne sont pas en réalité indépendantes. (7) et (14) sont couramment utilisées. En faisant la différence (14) - (15) , on trouve une équation pour l'accélération seule:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (16)$$

ou, <u>en incluant la contribution du vide dans ρ et p</u>:

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \qquad (16')}$$

<u>Densité critique</u>:

L'équation de Freedmann (14') peut se réécrire comme suit:

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} - 1 \equiv \Omega - 1 \qquad (17)$$

(<u>ρ incluant la contribution du vide</u>).

La densité critique se définit par :

$$\boxed{\frac{3H^2}{8\pi G} \equiv \rho_{crit}}$$

et Ω par :

$$\boxed{\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}}}$$

Comme H^2R^2 est > 0, le signe de k est le même que celui de $(\Omega - 1)$:

$k = +1 \Rightarrow \Omega > 1$	: Univers "fermé"	(18)
$k = +0 \Rightarrow \Omega = 1$	: Univers "plat"	(19)
$k = -1 \Rightarrow \Omega < 1$	: Univers "ouvert"	(20)

En terme de Ω , l'équation de Freedmann donnant la vitesse d'expansion est:

$$\boxed{\frac{k}{H^2R^2} = \Omega - 1 \qquad (21)}$$

La "courbure spatiale" dans le modèle de Freedmann-Robertson-Walker est :

$$^3R = \frac{6k}{R^2(t)} = 6H^2(\Omega - 1) \qquad (22)$$

De la forme de la métrique (2), il apparaît que les effets de la courbure spatiale se manifestent lorsque $r \approx |k|^{-1/2}$. On définit ainsi un "rayon de courbure" physique de l'Univers par:

$$R_{courb} \equiv R(t)|k|^{-1/2} = \left(\frac{6}{|^3R|^{1/2}}\right) = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}} \qquad (23)$$

<u>Densités d'énergie et de matière dans l'Univers:</u>[1]

♦ Sur bases des récentes observations de l'anisotropie du fond cosmique de radiation d’ondes micrométriques (CMB) sur des intervalles de 1° et moins, traduites en spectre de puissances multipolaires, l'Univers serait presque "plat", ce que l'on peut exprimer par:

$$\Omega_0 = 1.00 \pm 0.04 \qquad (24)$$

♦ Ces mesures d'anisotropie du CMB conduisent d'autre part à la valeur suivante de la densité baryonique:

$$\Omega_B h^2 = 0.022 \pm 0.004 \qquad (25)$$

en remarquable accord avec celle déduite de l'abondance primordiale de deutérium dans le cadre du modèle de la nucléosynthèse des éléments légers:

$$\Omega_B h^2 = 0.020 \pm 0.001 \qquad (26)$$

Avec la valeur récente de h:

$$h = \frac{H_0}{100 km \sec^{-1} Mpc^{-1}} = 0.72 \pm 0.07, \qquad (27)$$

(H_0 = "constante" de Hubble d'aujourd'hui)

il s'avère que les baryons ne représenteraient au plus que 4 % de la densité critique de l'Univers:

---

1 "Making sens of the new cosmology" Michael Turner (Astro-ph/0202372)

$$\Omega_B \approx 0.04 \qquad (28)$$

♦ Le CMB et les clusters de galaxies permettent une détermination du rapport de la densité de "matière" (en fait tout ce qui contribue à une contraction gravitationnelle: baryons, matière noire froide, neutrinos) à la matière ordinaire ou baryonique:

$$\text{CMB} \rightarrow \qquad \frac{\Omega_M}{\Omega_B} = 7.2 \pm 2.1 \qquad (29)$$

$$\text{Clusters} \rightarrow \qquad \frac{\Omega_M}{\Omega_B} = 9 \pm 1.5 \qquad (30)$$

ceci combiné avec les données ci-dessus concernant Ω_B donnant:

$$\Omega_M = 0.33 \pm 0.04 \qquad (31)$$

♦ Les Supernovae de type Ia sont utilisées comme "chandelles standard" en ce sens que leur luminosité intrinsèque est approximativement constante et de valeur connue. La mesure de la luminosité apparente, d'où la distance de luminosité, ainsi que du décalage vers le rouge (z) des raies caractéristiques permet de les situer dans le diagramme de Hubble.

Les observations faites sur la Supernova SN 1997ff , de type Ia, avec z $\approx$ 1.7, ainsi que sur une ou deux autres avec z $\approx$ 1.2, ont renforcé l'idée que l'Univers serait actuellement en expansion accélérée. L'ensemble des données recueillies sur un relativement grand nombre de SN indiquerait une récente accélération (z < 0.5) et une décélération dans le passé (z > .5)[2]

L'**énergie noire** serait, selon Michael Turner, le terme à utiliser pour désigner l'agent responsable de l'expansion accélérée observée de nos jours.

L'équation (16') que l'on reproduit ici :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \qquad (16')$$

montre que cet agent devrait être caractérisé par une pression négative d'amplitude comparable à sa densité d'énergie. En effet :

- Le facteur entre parenthèses dans le second membre de (16'), qui doit être négatif pour avoir accélération, peut se décomposer comme suit :

$$\rho + 3p = \rho_M + \rho_{VAC} + 3(p_M + p_{VAC}) = \rho_M + \rho_{VAC} + 3p_{VAC}$$

car : $p_M = 0$, selon (12).

Comme $(\rho_M + \rho_{VAC})$ est pratiquement égal à la densité critique, $\rho_M \approx \frac{\rho_{VAC}}{2}$ d'après (31). En remplaçant alors ρ_{VAC} par $-p_{VAC}$ selon (13), on a effectivement :

$$\rho + 3p = \rho_M + \rho_{VAC} + 3p_{VAC} \approx \left(-\frac{1}{2} - 1 + 3\right)p_{VAC} = +\frac{3}{2}p_{VAC} < 0$$

du fait que p_{VAC} est négative.

Cela étant, **l'énergie noire** aurait les propriétés suivantes :

- Elle n'émet pas de lumière
- Sa pression est négative : $\rho_{VAC} \approx -p_{VAC}$
- Elle est approximativement homogène, plus précisément, elle ne concentre pas avec la matière sur des distances au moins comparables aux dimensions de clusters de galaxies

---

[2] "Do SNe Ia provide direct evidence for past deceleration of the Universe ?" M. Turner, A. B Riess (Astro-ph 0106051)

- Par comparaison avec la densité critique :

$$\Omega_{VAC} = 0.67 \pm 0.06 \qquad (32)$$

La différence de comportement de la densité de matière et de la densité d'énergie du vide au cours de l'expansion de l'Univers (voir 11 – 12 – 13) peut expliquer pourquoi dans le passé l'Univers était en expansion décélérée alors que la densité de matière dominait la densité d'énergie noire et que l'on est entré dans une phase d'expansion accélérée lorsque la densité de matière a décru au point que la densité d'énergie noire, qui restait constante, a dominé par ses effets.

Densité d'énergie du vide et champ de Higgs:

L'Univers serait donc en expansion accélérée sous l' effet, comme on l'a supposé, d'une densité d'énergie « noire » dans le vide. Pour le physicien des particules élémentaires, cet objet pourrait résulter de l'omniprésence dans le vide, en l'absence de toute matière, du champ de Higgs :

- Les interactions électro-faibles entre particules élémentaires sont actuellement décrites de manière très satisfaisante dans le cadre du "Modèle Standard" sous la forme d'une théorie de jauge spontanément brisée. Le mécanisme de Higgs pour opérer cette brisure de symétrie hypothétise l'existence d'un champ scalaire neutre dont la valeur moyenne dans le vide, donc en l'absence de toute matière, est différente de 0. De tous les champs qui peuvent pénétrer le vide et exercer des actions à distance, le champ de Higgs est le seul à posséder cette propriété.

  Le boson de Higgs correspondant n'a pas encore été découvert, sans doute comme beaucoup le pense, du fait que sa masse élevée ne permet pas, avec les accélérateurs actuellement en exploitation, ou sa création, ou l'observation d'un signal suffisamment significatif. Des limites inférieures de sa masse, l'un des paramètres du modèle, ont ainsi été établies. Un autre paramètre du modèle a néanmoins pu être déterminé, comme nous le verrons plus loin. Avec ces éléments du problème, nous avons tenté de faire une estimation de la densité d'énergie du vide résultant de la présence omniprésente du champ de Higgs.

Le mécanisme de Higgs

La brisure spontanée de la symétrie $SU(2) \times U(1)$ de la partie électro-faible du Modèle Standard (mécanisme inventé en vue de rendre les bosons de jauge massifs comme il se doit) s'effectue en introduisant dans la densité lagrangienne le terme suivant exprimant la self-interaction d'un champ iso-scalaire hypothétique:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \\ V(\Phi) &= -\frac{\mu^2}{2}\Phi^+\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^+\Phi)^2 \end{aligned} \qquad (32)$$

dans lequel les paramètres μ^2 et λ sont tous deux positifs. Ce terme possède la symétrie requise et est rendu invarariant de jauge par remplacement des dérivées ordinaires ∂_μ par les dérivées covariantes correspondantes…

Pour les besoins de l'évaluation numérique, il suffira de considérer le cas d'un champ classique scalaire réel Φ :

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi)$$
$$V(\Phi) = -\frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4 \qquad (33)$$

Avec les paramètres ainsi fixés, $(\mu^2, \lambda) > 0$, il s'avère que $V(\Phi)$ présente deux minima déterminés par les conditions:

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0; \frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} > 0 \qquad (34)$$

et qui valent:

$$\Phi^{\min}{}_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \qquad (35)$$

Ce sont des minima stables autour de l'un desquels, en l'occurence:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad , \qquad (36)$$

la théorie quantique du Modèle Standard a été construite. η s'identifie avec la moyenne sur le vide du champ Φ.

La masse du boson de Higgs associé au champ Φ vaut:

$$M_H = \mu \qquad (37)$$

La densité d'énergie du vide correspondant à la valeur moyenne sur le vide η s'obtient à partir du tenseur Energie-Impulsion qui peut s'écrire:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - L g_{\mu\nu} \qquad (38)$$

Comme η est une constante:

$$T_{\mu\nu} = V(\eta) g_{\mu\nu} \qquad (39)$$

et ainsi, la densité d'énergie du vide:

$$\boxed{T_{00} \equiv \rho_{VAC} = -\frac{M_H{}^4}{4\lambda} \qquad (40)}$$

<u>Evaluation de ρ_{VAC}</u> :

Le paramètre η peut s'obtenir à partir de :

$$M_W = \frac{g\eta}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 M_W{}^2} \rightarrow \eta = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2\sqrt{G_F}} = 174 GeV$$ [3]

En prenant M_H =120 GeV , l'équation (36) donne: $\lambda = 1.05$ (sans dimensions).

De là :

$$\boxed{\rho_{VAC} = -\frac{M_H{}^4}{4\lambda} = -0.22 \times 10^{21}\, MeV^4 \qquad (41)}$$

que l'on comparera à la <u>densité critique</u>:

$$\rho_{crit.} = 1.88 \times 10^{-29} \times h^2 \times g.cm^{-3} = 7.\ 58 \times 10^{-32} \times h^2 \times MeV^4$$

En prenant h = 0.72 (27) :

$$\boxed{\rho_{crit.} = 3.93 \times 10^{-32}\, MeV^4 \qquad (42)}$$

[3] Phys. LEP2 p. 358

Remarques :

- ρ_{VAC} a une valeur négative, contrairement à ce qu'il faudrait pour qu'il y ait accélération de l'expansion
- La disparité entre $\rho_{crit.}$ et ρ_{VAC} est considérable alors que l'on devrait s'attendre à ce qu'elles soient du même ordre de grandeur.

Un remède à cette situation consisterait à simplement ajouter au lagrangien de Higgs une constante adéquate, voisine de $\frac{M_H{}^4}{4\lambda}$, laquelle ne modifierait en rien la théorie quantique qui en découlerait.

Mais ceci signifierait que tout élément quantitatif concernant cette énergie « noire » ne peut être exploité pour en déduire les propriétés du boson de Higgs, pour autant que celui-ci existe réellement, et vice-versa !

A suivre …